量子力学A演習 解答例 （**演習５**）v1.4

(1) $\hat{\sigma}_z$ の行列表現 $\hat{\sigma}_z \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ と、列ベクトルの表現 $|u> \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|d> \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の積を実際に計算し、固有値方程式 $\hat{\sigma}_z |u> = (+1)|u>$ 、$\hat{\sigma}_z |d> = (-1)|d>$ を満たしていることを確かめなさい。

（解答例）

$$\hat{\sigma}_z |u> \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to (+1)|u> 、\quad \hat{\sigma}_z |d> \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to (-1)|d>$$

(2) 演算子 $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$ の外積による表現

$$\hat{\sigma}_x = |u><d| + |d><u| \qquad (3\text{-}5\text{-}37)$$

$$\hat{\sigma}_y = -i|u><d| + i|d><u| \qquad (3\text{-}5\text{-}38)$$

を求めなさい。

（解答例）

(3-4-31)式にしたがって、$\hat{\sigma}_x$ をスペクトル分解すると、

$$\hat{\sigma}_x = |r><r| - |l><l|$$

(3-26)(3-27)より

$|r> = \frac{1}{\sqrt{2}}|u> + \frac{1}{\sqrt{2}}|d>$ 、$|l> = \frac{1}{\sqrt{2}}|u> - \frac{1}{\sqrt{2}}|d>$ なので、これを上の式に代入して展開する。

$$\hat{\sigma}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u> + |d>)\frac{1}{\sqrt{2}}(<u| + <d|) - \frac{1}{\sqrt{2}}(|u> - |d>)\frac{1}{\sqrt{2}}(<u| - <d|)$$

$$= \frac{1}{2}\{(|u><u| + |u><d| + |d><u| + |d><d|) - (|u><u| - |u><d| - |d><u| + |d><d|)\}$$

$$= \frac{1}{2}(2|u><d| + 2|d><u|) = |u><d| + |d><u|$$

同様にして、$\hat{\sigma}_y$ をスペクトル分解すると

$$\hat{\sigma}_y = |i><i| - |o><o|$$

なので、(3-32)(3-33)で示した

$|i> = \frac{1}{\sqrt{2}}|u> + \frac{i}{\sqrt{2}}|d>$ 、　$|o> = \frac{1}{\sqrt{2}}|u> - \frac{i}{\sqrt{2}}|d>$ 　を上の式に代入し展開する。

ただし、ブラベクトルを作るとき、$\frac{i}{\sqrt{2}}|d> \to \frac{-i}{\sqrt{2}}<d|$ となることに注意

$$\hat{\sigma}_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u> + i|d>)\frac{1}{\sqrt{2}}(<u| - i<d|) - \frac{1}{\sqrt{2}}(|u> - i|d>)\frac{1}{\sqrt{2}}(<u| + i<d|)$$

$$= \frac{1}{2}\{(|u><u| - i|u><d| + i|d><u| + |d><d|) - (|u><u| + i|u><d| - i|d><u| + |d><d|)\}$$

$$= \frac{1}{2}(-2i|u><d| + 2i|d><u|) = -i|u><d| + i|d><u|$$

(3) (2)の外積による表現を使い、$\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$の行列表現

$$\hat{\sigma}_x \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}、\quad \hat{\sigma}_y \to \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}5\text{-}39)$$

を求めよ。

（解答例）

$$(\sigma_x)_{uu} \equiv <u|\hat{\sigma}_x|u> = <u|(|u><d| + |d><u|)|u> = 0$$
$$(\sigma_x)_{ud} \equiv <u|\hat{\sigma}_x|d> = <u|(|u><d| + |d><u|)|d> = 1$$
$$(\sigma_x)_{du} \equiv <d|\hat{\sigma}_x|u> = <d|(|u><d| + |d><u|)|u> = 1$$
$$(\sigma_x)_{dd} \equiv <d|\hat{\sigma}_x|d> = <d|(|u><d| + |d><u|)|d> = 0$$

$$(\sigma_y)_{uu} \equiv <u|\hat{\sigma}_y|u> = <u|(-i|u><d| + i|d><u|)|u> = 0$$
$$(\sigma_y)_{ud} \equiv <u|\hat{\sigma}_y|d> = <u|(-i|u><d| + i|d><u|)|d> = -i$$
$$(\sigma_y)_{du} \equiv <d|\hat{\sigma}_y|u> = <d|(-i|u><d| + i|d><u|)|u> = i$$
$$(\sigma_y)_{dd} \equiv <d|\hat{\sigma}_y|d> = <d|(-i|u><d| + i|d><u|)|d> = 0$$

(4) Pauliスピン行列は全てエルミート行列であるが、同時にユニタリー行列でもある事を示せ。

（略解） $\hat{\sigma}_x{}^\dagger\hat{\sigma}_x = \hat{I},\ \hat{\sigma}_y{}^\dagger\hat{\sigma}_y = \hat{I},\ \hat{\sigma}_z{}^\dagger\hat{\sigma}_z = \hat{I}$ を示せば良い。

$\hat{\sigma}_x$ はエルミートなので$\hat{\sigma}_x{}^\dagger = \hat{\sigma}_x$、よって、$\hat{\sigma}_x{}^\dagger\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_x \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \hat{I}.$ 他も同様にして導ける。

（参考：これらの結果より、$\hat{\sigma}_x{}^2 = \hat{I}$, $\hat{\sigma}_y{}^2 = \hat{I}$, $\hat{\sigma}_z{}^2 = \hat{I}$ となる。）

(5) $\hat{M}$ がエルミート演算子ならば、$\hat{M}' = \hat{U}^\dagger\hat{M}\hat{U}$ で得られた$\hat{M}'$もエルミート演算子であることを示せ。ただし、$\hat{U}$ はユニタリー演算子である。

（解答例） $(\hat{M}')^\dagger = \hat{M}'$ を示す。(3-4-26)の性質を使い$(\hat{M}')^\dagger = (\hat{U}^\dagger(\hat{M}\hat{U}))^\dagger = (\hat{M}\hat{U})^\dagger(\hat{U}^\dagger)^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{M}^\dagger\hat{U} = \hat{U}^\dagger\hat{M}\hat{U} = \hat{M}'$

(6) $\hat{M}$ がユニタリー演算子ならば、$\hat{M}' = \hat{U}^\dagger\hat{M}\hat{U}$ で得られた$\hat{M}'$もユニタリー演算子であることを示せ。ただし、$\hat{U}$ はユニタリー演算子である。

（解答例） $(\hat{M}')^\dagger\hat{M}' = \hat{I}$ を示す。$\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{I}$ 、$\hat{M}^\dagger\hat{M} = \hat{I}$ であることを使うと、

$$(\hat{M}')^\dagger\hat{M}' = (\hat{U}^\dagger\hat{M}\hat{U})^\dagger(\hat{U}^\dagger\hat{M}\hat{U}) = \hat{U}^\dagger\hat{M}^\dagger\hat{U}\hat{U}^\dagger\hat{M}\hat{U} = \hat{U}^\dagger\hat{M}^\dagger\hat{M}\hat{U} = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{I}$$

(7) $\hat{U} \equiv \sum_{k=1}^{N} |\lambda'_k><\lambda_k|$ で定義した演算子はユニタリー演算子の性質、$\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = 1$ を満たすことを示せ。

（解答例） 演習4の(6) 式(3-4-29)より、$\hat{U}^\dagger = (\sum_{k=1}^{N} |\lambda'_k><\lambda_k|)^\dagger = \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k><\lambda'_k|$

よって、

$$\hat{U}^\dagger\hat{U} = \sum_{j=1}^{N}|\lambda_j><\lambda'_j|\sum_{k=1}^{N}|\lambda'_k><\lambda_k| = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}|\lambda_j><\lambda'_j|\lambda'_k><\lambda_k| = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}|\lambda_j>\delta_{jk}<\lambda_k| = \sum_{k=1}^{N}|\lambda_k><\lambda_k| = 1$$

ここで、基底の規格直交性 $<\lambda'_j|\lambda'_k> = \delta_{jk}$ と 完備性[1] $\sum_{k=1}^{N}|\lambda_k><\lambda_k| = \hat{I}$ を使った。

(8) $\hat{\sigma}_y$ に対応するPauli行列 $\hat{\sigma}_y \to \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ に関して以下のことを示せ

a) この行列の固有値を求めよ
b) この行列の固有ベクトルを求めよ（規格化して求めよ）
この結果は、

[1] (3-13)を見よ.

(3-32)式 $|i>=\frac{1}{\sqrt{2}}|u>+\frac{i}{\sqrt{2}}|d>$ と(3-33)式 $|o>=\frac{1}{\sqrt{2}}|u>-\frac{i}{\sqrt{2}}|d>$

に対応していることを示せ。

c) この行列を対角化するユニタリー行列 $\hat{U}$ を求めよ

d) $\hat{U}$ の 各列は b) の固有ベクトルになっていることを確かめよ

e) $\hat{U}^\dagger \hat{\sigma}_y \hat{U}$ に対応する行列を計算し、対角行列になっていることを示せ

（解答例）

a) $\begin{vmatrix} 0-\lambda' & -i \\ i & 0-\lambda' \end{vmatrix}=0$ より、$\lambda'^2-1=0.$　これより、固有値は $\lambda'=\pm 1$

b) $\lambda'=1$ の場合の固有ベクトルを $|\lambda_1'>\to\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$, $\lambda'=-1$ の場合を $|\lambda_2'>\to\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$ と置く

$\hat{\sigma}_y|\lambda_1'>=(+1)|\lambda_1'>\to\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=(+1)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$ から、$-i\alpha_2=\alpha_1,\ i\alpha_1=\alpha_2$ なので $\alpha_1=1/\sqrt{2},\alpha_2=i/\sqrt{2}$

(不定性があるが、α_1 を実数に選ぶ習慣があるのと、規格化条件 $\alpha_1^2+\alpha_2^2=1$ を使った。)

$\hat{\sigma}_y|\lambda_2'>=(-1)|\lambda_2'>\to\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$ から、$-i\beta_2=-\beta_1,\ i\beta_1=-\beta_2$ なので $\beta_1=1/\sqrt{2},\beta_2=-i/\sqrt{2}$

よって、$|\lambda_1'>\to\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ i/\sqrt{2}\end{pmatrix}$、$|\lambda_2'>\to\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ -i/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$|i>=|\lambda_1'>\to\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\to|i>=\frac{1}{\sqrt{2}}|u>+\frac{i}{\sqrt{2}}|d>$

$|o>=|\lambda_2'>\to\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}-\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\to|o>=\frac{1}{\sqrt{2}}|u>-\frac{i}{\sqrt{2}}|d>$

(c) 3-5-6節の　$|\lambda_i'>=\hat{U}|\lambda_i>$ のとき、$U_{kj}=<\lambda_k|\hat{U}|\lambda_j>=<\lambda_k|\lambda_j'>$ なる関係(3-5-29)

をこの問題の場合にあてはめると、

$|\lambda_1'>=|i>=\hat{U}|u>$, $|\lambda_2'>=|o>=\hat{U}|d>$

$U_{11}=<u|i>=1/\sqrt{2},\quad U_{12}=<u|o>=1/\sqrt{2},$

$U_{21}=<d|i>=i/\sqrt{2},\quad U_{12}=<d|o>=-i/\sqrt{2}$

よって、$\hat{U}\to\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}$

(d)　$\hat{U}$ の１列目 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$ は $|i>$ に、２列目 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$ は $|o>$ に対応している。

(e)　$\hat{U}^\dagger\to\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}$　なので、

$$\hat{U}^\dagger\hat{\sigma}_y\hat{U}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

結果は確かに対角行列になっている。

量子力学A演習 解答例 （**演習6**）v1.4

(1) $<(\Delta\hat{M})^2>_A = <\hat{M}^2>_A - (<\hat{M}>_A)^2$ を示せ。

（解答例）

$$<(\Delta\hat{M})^2>_A = <A|(\hat{M} - <\hat{M}>_A \hat{I})(\hat{M} - <\hat{M}>_A \hat{I})|A> = <A|(\hat{M}^2 - <\hat{M}>_A \hat{I}\hat{M} - \hat{M}<\hat{M}>_A \hat{I} + <\hat{M}>_A^2 \hat{I}^2)|A>$$

$$= <A|(\hat{M}^2)|A> - 2<\hat{M}>_A <A|\hat{M}|A> + <\hat{M}>_A^2 <A|A> = <\hat{M}^2>_A - (<\hat{M}>_A)^2$$

(2) 次の交換関係を証明せよ

$$[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i\hat{\sigma}_z\ ,\ [\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z] = 2i\hat{\sigma}_x\ ,\ [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x] = 2i\hat{\sigma}_y \qquad \text{(3-6-13)}$$

（解答例）やり方はいろいろあるが、ここではPauli行列から求める。

$\hat{\sigma}_x \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$、 $\hat{\sigma}_y \to \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ 、 $\hat{\sigma}_z \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ なので、

$$[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y - \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = 2i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to 2i\hat{\sigma}_z$$

他の関係も同様にして導ける（略）

(3) $\hat{\sigma}_z$ の固有状態$|u>$ で σ_y を測定した時、その平均値$<\hat{\sigma}_y>_u$ と分散$<(\Delta\hat{\sigma}_y)^2>_u$ を求めよ。

（hint: $<\hat{\sigma}_y>_u = <u|\hat{\sigma}_y|u>$ 、 $<(\Delta\hat{\sigma}_y)^2>_u = <\hat{\sigma}_y{}^2>_u - (<\hat{\sigma}_y>_u)^2$)

（解答例）$\hat{\sigma}_y$ の外積による表現(3-5-18)式を使って、

$$<\hat{\sigma}_y>_u = <u|\hat{\sigma}_y|u> \ = <u|(-i|u><d| + i|d><u|)|u>$$

$$= -i<u|u><d|u> + i<u|d><u|u> = 0$$

$$<\hat{\sigma_y^2}>_u = <u|\hat{\sigma_y^2}|u> \ = <u|(-i|u><d| + i|d><u|)(-i|u><d| + i|d><u|)|u>$$

$$= <u|(-|u><d|u><d| + |u><d|d><u| + |d><u|u><d| - |d><u|d><u|)|u>$$

$$= <u|(|u><d|d><u| + |d><u|u><d|)|u>$$

$$= <u|(|u><u| + |d><d|)|u> = <u|u><u|u> + <u|d><d|u> = 1$$

$$\therefore <(\Delta\hat{\sigma}_y)^2>_u = <\hat{\sigma}_y{}^2>_u - (<\hat{\sigma}_y>_u)^2 = 1 - 0 = 1$$

（別解）行列の演算で求める

$$<\hat{\sigma}_y>_u = <u|\hat{\sigma}_y|u> = (1\quad 0)\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0\quad -i)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$<\hat{\sigma_y^2}>_u = <u|\hat{\sigma_y^2}|u> = <u|\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_y|u> = (1\quad 0)\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (1\quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1\quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\text{、}\ \therefore <(\Delta\hat{\sigma}_y)^2>_u = <\hat{\sigma}_y{}^2>_u - (<\hat{\sigma}_y>_u)^2 = 1 - 0 = 1$$

(4) $\hat{\sigma}_z$ の固有状態$|u>$ でσ_x を測定し、状態を$|u>$ に戻してから σ_y を測定する。[2]この測定において、 $\hat{L} \to \hat{\sigma}_x$ 、 $\hat{M} \to \hat{\sigma}_y$ 、$A \to u$ と置くと、不確定性関係(3-6-6)

$$<(\Delta\hat{L})^2>_A <(\Delta\hat{M})^2>_A \geq \frac{1}{4}|<[\hat{L}, \hat{M}]>_A|^2 \qquad \text{(3-6-6再掲)}$$

を満たしている事を示しなさい。

（解答例） $<(\Delta\hat{\sigma}_x)^2>_u <(\Delta\hat{\sigma}_y)^2>_u \geq \frac{1}{4}|<[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y]>_u|^2$ を示せば良い。

---

[2] 何度もこの手順を繰り返し観測する

前問より、 $<(\Delta\hat{\sigma}_y)^2>_u=1$ 、また、3-6-2節に示した方法か、前問と同様にして求めると、 $<(\Delta\hat{\sigma}_x)^2>_u=1$ なので、左辺の値は1x1=1となる。
次に右辺を求める。問１より $[\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_y]=2i\hat{\sigma}_z$ なので、

$$\frac{1}{4}|<[\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_y]>_u|^2=\frac{1}{4}|<2i\hat{\sigma}_z>_u|^2$$

$<\hat{\sigma}_z>_u=<u|\hat{\sigma}_z|u>=1$ なので $\frac{1}{4}|<2i\hat{\sigma}_z>_u|^2=\frac{1}{4}(-2i)(2i)=1$

結局、 不確定性関係式の左辺＝右辺＝１となり、不確定性関係式（等号の場合）を満たしている。

(5) $\hat{\sigma}_x$ の固有状態 $|r>$ で σ_x を測定し、引き続き σ_y を測定する。 $\hat{L}\to\hat{\sigma}_x$ 、 $\hat{M}\to\hat{\sigma}_y$ 、 $A\to r$ と置くと、この場合も不確定性関係 (3-6-14）を満たしている事を示せ。

（解答例） $<(\Delta\hat{\sigma}_x)^2>_r<(\Delta\hat{\sigma}_y)^2>_r\geq\frac{1}{4}|<[\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_y]>_r|^2$ を示せば良い。

$<(\Delta\hat{\sigma}_x)^2>_r=<\hat{\sigma}_x{}^2>_r-(<\hat{\sigma}_x>_r)^2$

$<\hat{\sigma}_x>_r=<r|\hat{\sigma}_x|r>=1$ 、 $<\hat{\sigma_x^2}>_r=<r|\hat{\sigma_x^2}|r>=<r|\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_x|r>=1$

$<(\Delta\hat{\sigma}_x)^2>_r=1-1=0$

$\hat{\sigma}_x$ の固有状態 $|r>$ で σ_x を測定した結果もまた $|r>$ になっている[3]。なので、その後、σ_yを測定する際の平均値は、 $<\hat{\sigma}_y>_r=<r|\hat{\sigma}_y|r>$ を求めれば良い。

ここでは、これを行列の演算で求めてみる。

$$<r|\hat{\sigma}_y|r>=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 1)\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}(i\ \ -i)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0$$

$$<\hat{\sigma_y^2}>_r=<r|\hat{\sigma_y^2}|r>=<r|\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_y|r>=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 1)\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 1)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\times2=1$$

$\therefore<(\Delta\hat{\sigma}_y)^2>_r=<\hat{\sigma}_y{}^2>_r-(<\hat{\sigma}_y>_r)^2=1-0=1$

したがって、左辺 $<(\Delta\hat{\sigma}_x)^2>_r<(\Delta\hat{\sigma}_y)^2>_r=0$ となる。

右辺は、$\frac{1}{4}|<[\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_y]>_r|^2=\frac{1}{4}|<2i\hat{\sigma}_z>_r|^2$ であるが、

$$<\hat{\sigma}_z>_r=<r|\hat{\sigma}_z|r>=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 1)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ -1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0$$

なので、右辺=0となる。
よって 不確定性関係式の左辺＝右辺＝０となり、不確定性関係式（等号の場合）を満たしている。

(6) $[\hat{x},\hat{p}_x]=i\hbar$ である事を示せ。（hint: $\hat{x}\to x$、$\hat{p}_x\to-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ とし、交換子を波動関数 $\phi(x)$ に作用させることにより計算）

（解答例） $[\hat{x},\hat{p}_x]=(\hat{x}\hat{p}_x-\hat{p}_x\hat{x})$. $\hat{x}\to x$、$\hat{p}_x\to-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ の置き換えをし、波動関数 $\phi(x)$ に作用させる。

$x(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})\phi(x)-(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})(\phi(x)x)=-i\hbar x\frac{\partial}{\partial x}\phi(x)+i\hbar x\frac{\partial}{\partial x}\phi(x)+i\hbar\phi(x)=i\hbar\phi(x).$ ゆえに、$[\hat{x},\hat{p}_x]=i\hbar$

---

[3] この為、3-6-1節で述べた「測定の前提」に反しない事に注意

(7)　式(3-6-6)で $\hat{L} \to \hat{x}$ 、$\hat{M} \to \hat{p}_x$ と置くことにより、$\hat{x}, \hat{p}_x$ の間の不確定性関係の不等式が

$$(\delta\hat{x})(\delta\hat{p}_x) \geq \frac{1}{2}\hbar \qquad \text{(3-6-14)}$$

となる事を示せ。ここで、$(\delta\hat{x}) = \sqrt{<(\Delta\hat{x})^2>}$ 、$(\delta\hat{p}_x) = \sqrt{<(\Delta\hat{p}_x)^2>}$

（解答例）　式(3-6-6)の平方根をとった式(3-6-7)より、

$$(\delta\hat{x})_A(\delta\hat{p}_x)_A \geq \frac{1}{2}|<[\hat{x},\hat{p}_x]>_A| = \frac{1}{2}|<i\hbar>_A| = \frac{1}{2}\sqrt{(-i\hbar)(i\hbar)} = = \frac{1}{2}\hbar$$

(8) 任意の演算子$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ に対して$[\hat{A}, \hat{B}+\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$である事を示せ。

（解答例）$[\hat{A}, \hat{B}+\hat{C}] = \hat{A}(\hat{B}+\hat{C}) - (\hat{B}+\hat{C})\hat{A} = \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C} - \hat{B}\hat{A} - \hat{C}\hat{A} = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$

(9) 不確定性関係の不等式(3-6-6)を求めたい。以下の事を示しなさい。

(a) $\hat{L}$ と$\hat{M}$がエルミート演算子の時、$[\hat{L}, \hat{M}] = i\hat{N}$ ならば $\hat{N}$ はエルミート演算子

(b) ある状態$|A>$でL やM を測定する場合、それらの平均値を

$<\hat{L}>_A = <A|\hat{L}|A>$ 、 $<\hat{M}>_A = <A|\hat{M}|A>$ 、

偏差に対応する演算子を $\Delta\hat{L} = \hat{L} - <\hat{L}>$ 、$\Delta\hat{M} = \hat{M} - <\hat{M}>$ とすると、

$$[\Delta\hat{L}, \Delta\hat{M}] = [\hat{L}, \hat{M}] \qquad \text{(3-6-15)}$$

(c) 任意の実数 γ に対して、

$$J(\gamma) = <A|(\Delta\hat{L} - i\gamma\Delta\hat{M})(\Delta\hat{L} + i\gamma\Delta\hat{M})|A> \geq 0 \qquad \text{(3-6-16)}$$

(d) γ の２次式 $J(\gamma)$ の判別式を作ることにより、求める不確定性関係の不等式

$$<(\Delta\hat{L})^2>_A <(\Delta\hat{M})^2>_A \geq \frac{1}{4}|<[\hat{L}, \hat{M}]>_A|^2 \quad \text{(3-6-17)}$$ を示せ。

（解答例）

(a) $[\hat{L}, \hat{M}] = \hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L} = i\hat{N}$ なので、$\hat{N} = (-i)(\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L}) = i\hat{M}\hat{L} - i\hat{L}\hat{M}$

$\hat{L}$ と$\hat{M}$はエルミート演算子なので　$\hat{N}^\dagger = (i\hat{M}\hat{L} - i\hat{L}\hat{M})^\dagger = -i\hat{L}^\dagger\hat{M}^\dagger + i\hat{M}^\dagger\hat{L}^\dagger = -i\hat{L}\hat{M} + i\hat{M}\hat{L}$ 脚注4

よって、$\hat{N}^\dagger = \hat{N}$ だから $\hat{N}$ もエルミート演算子

(b) $[\Delta\hat{L}, \Delta\hat{M}] = [\hat{L} - <\hat{L}>, \hat{M} - <\hat{M}>]$

$= [\hat{L}, \hat{M}] - [\hat{L}, <\hat{M}>] - [<\hat{L}>, \hat{M}] + [<\hat{L}>, <\hat{M}>]$ 脚注5

$= [\hat{L}, \hat{M}]$

（$<\hat{L}>$, $<\hat{M}>$ はただの実数なので、真ん中の行の最初の項以外は０となる）

(c) $\Delta\hat{L}^\dagger = \hat{L}^\dagger - <\hat{L}>^* = \hat{L} - <\hat{L}> = \Delta\hat{L}$、$\Delta\hat{M}^\dagger = \hat{M}^\dagger - <\hat{M}>^* = \hat{M} - <\hat{M}> = \Delta\hat{M}$

ここで、エルミート演算子の固有値は実数なのでその期待値も実数であることを使った。

$(\Delta\hat{L} + i\gamma\Delta\hat{M})^\dagger = (\Delta\hat{L}^\dagger - i\gamma\Delta\hat{M}^\dagger) = \Delta\hat{L} - i\gamma\Delta\hat{M}$

よって、$|\alpha> \equiv (\Delta\hat{L} + i\gamma\Delta\hat{M})|A>$ とおくと、

$<\alpha| = <A|(\Delta\hat{L} + i\gamma\Delta\hat{M})^\dagger = <A|(\Delta\hat{L} - i\gamma\Delta\hat{M})$

これより、$J(\gamma) = <A|(\Delta\hat{L} - i\gamma\Delta\hat{M})(\Delta\hat{L} + i\gamma\Delta\hat{M})|A> = <\alpha|\alpha> \geq 0$ となる。

(d) $J(\gamma) = <A|(\Delta\hat{L} - i\gamma\Delta\hat{M})(\Delta\hat{L} + i\gamma\Delta\hat{M})|A>$

$= <A|\Delta\hat{L}^2|A> + i\gamma <A|(\Delta\hat{L}\Delta\hat{M} - \Delta\hat{M}\Delta\hat{L})|A> + \gamma^2 <A|\Delta\hat{M}^2|A>$

$= <\Delta\hat{L}^2>_A - \gamma <\hat{N}>_A + \gamma^2 <\Delta\hat{M}^2>_A \geq 0$ 脚注6

$J(\gamma) \geq 0$ なので、γ に関する２次式とみたとき、その判別式は正にはなり得ない。

ゆえに判別式 $D = <\hat{N}>_A^2 - 4<\Delta\hat{L}^2>_A <\Delta\hat{M}^2>_A \leq 0$ が成り立つ。

これから、不確定性関係の不等式 (3-6-17)が求まる。

---

[4] ただの数(i)のエルミート共役は複素共役(-i)であることに注意（演習４(5)）

[5] 交換関係は線形なので、[A, B+C]=[A, B]+ [A, C].（演算子のハットの記号は省略）。 後の節や章で交換関係の他の性質も調べる。

[6] 設問(b)の(3-6-15)式と設問(a)の [L, M]=i N （演算子のハットの記号は省略）を使った。